Liceo Statale Scientifico, Linguistico, Classico e delle Scienze umane "G. Giolitti - G. B. Gandino"
1 Febbraio 2023

Esercitazione in vista della gara della festa della Matematica. Lezione 2: calcolo combinatorio e probabilità.

Regolamento *Ogni squadra è formata da un minimo di 4 persone e da un massimo di 6. Un componente avrà la funzione di "capitano". La gara consiste nella risoluzione di un certo numero di problemi nel tempo assegnato (100 minuti). Ogni problema ha come risposta un intero compreso tra 0000 e 9999. Quando una squadra ritiene di aver risolto un certo problema, scrive il numero del quesito e la risposta (solo la risposta, non i passaggi che hanno portato a ricavarla). La risposta va indicata scrivendo unicamente le quattro cifre del numero (se sono meno di quattro cifre è indifferente mettere oppure no gli zeri iniziali), senza lasciare indicati eventuali prodotti, esponenti, ecc. (ad esempio se la risposta è 45 indicare 0045 oppure 45 e non $5 \cdot 9$ o $5 \cdot 3^2$ o 32+13). Quando non altrimenti indicato, se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ammette soluzioni, scrivere 0000, invece se il problema ne ammette più d'una, scrivere 9999 sull'applicazione web. Quando non altrimenti indicato, se la soluzione di un quesito non è un numero intero, scrivere la parte intera del risultato (ad esempio se la risposta è 13,78 scrivere 0013 oppure 13). Quando non altrimenti indicato, se la soluzione di un problema è un numero di più di quattro cifre, scriverne le prime quattro cifre da sinistra. Appena inviata la risposta ad un quesito, si potrà verificare sulla pagina web se la risposta data è corretta oppure no. Se la risposta è sbagliata, la squadra perde 10 punti, ma può tornare a pensare allo stesso problema fornendo poi successivamente un'altra risposta. Se la risposta è corretta, la squadra guadagna un numero di punti pari al valore del problema. Il punteggio di ogni problema è quello indicato sul testo e rimane costante per tutta la durata della gara. Se una squadra consegna due volte una risposta esatta allo stesso problema, guadagna una sola volta il punteggio. Se invece consegna più volte risposte sbagliate ad uno stesso quesito, subisce più volte la penalizzazione di 10 punti. La penalizzazione non viene assegnata se una squadra consegna una risposta sbagliata ad un problema al quale ha precedentemente fornito la risposta corretta e non si perde il punteggio positivo guadagnato in precedenza.*

1. (15 points) Calcola quanti anagrammi, anche senza significato, si possono fare con le parole: APE, MAMMA e TRATTATIVA.

2. (15 points) Quante cinquine si possono fare con i 90 numeri del lotto? Quanti sono invece i terni?

3. (15 points) Devi costruire il PIN del tuo cellulare nuovo; vuoi scegliere 4 delle 10 cifre, senza ripeterne nessuna. Quanti codici puoi inventare?

4. (20 points) Un allenatore di calcio ha a disposizione 4 attaccanti, 6 centrocampisti, 5 difensori e 3 portieri. Ha scelto di giocare con 1 portiere e con il modulo 4-3-3 che prevede 4 difensori, 3 centrocampisti e 3 attaccanti ma non ha ancora scelto i titolari. Quante formazioni potrebbe schierare? E se i giocatori per ruolo fossero molto duttili e in grado di giocare da esterni o da interni, destri o sinistri?

5. (20 points) Il numero di telefono di Gianni è 0538 691742. La sua amica Anna osserva che il numero di telefono è formato da tutte e sole le 10 cifre, quindi pensa sia facile da ricordare. Dopo qualche tempo Anna vuole chiamare Gianni. Sa che Gianni vive a Villa Bò, quindi risale al prefisso 0538 dopo una ricerca sul Web, ma non riesce assolutamente a ricordare il resto del numero. Quanti tentativi al massimo dovrà fare Anna per riuscire a telefonare?

6. (20 points) In quanti modi diversi possiamo distribuire 8 tavolette di cioccolato a 5 bambini, sapendo che possiamo assegnare a qualche bambino più di una tavoletta? Come cambierebbe il risultato se tutti i bambini dovessero avere almeno una tavoletta?

7. (15 points) Un'urna contiene 20 palline numerate da 1 a 20. Calcola la probabilità che, estraendo a caso una pallina, esca un numero:
   (a) pari
   (b) multiplo di 8 o maggiore di 17
   (c) dispari o minore di 7

8. (15 points) Da un mazzo di 52 carte si estraggono consecutivamente 2 carte senza rimettere la carta estratta nel mazzo. Calcolare la probabilità che esse siano di cuori, sapendo che sono entrambe rosse.

9. (15 points) Un'urna A contiene 3 palline rosse, 2 bianche e 5 nere, mentre un'urna B contiene 6 palline bianche e 10 nere. Estrai una pallina da A e una da B e calcola la probabilità che:
   (a) siano entrambe nere;
   (b) siano una rossa e una bianca;
   (c) non siano entrambe bianche.

FORMULARIO

Calcolo Combinatorio	
Permutazioni senza ripetizioni	$P_n = n!$
Permutazioni con ripetizioni	$P_n^r = \frac{n!}{r_1!\, r_2! \ldots r_k!}$
Disposizioni senza ripetizioni	$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \bigwedge n > k$
Disposizioni con ripetizioni	$D_{n,k}^r = n^k$
Combinazioni senza ripetizioni	$C_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \bigwedge n > k$
Combinazioni con ripetizioni	$C_{n,k}^r = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$

Formule e proprietà importanti

Probabilità secondo la definizione classica
Sia E un evento di uno spazio campionario Ω, in cui tutti gli eventi elementari hanno la stessa possibilità di verificarsi. Supponiamo che l'evento E sia formato da k eventi elementari (brevemente detti «casi favorevoli») e lo spazio campionario Ω sia formato da n eventi elementari (brevemente detti «casi possibili»).
Si definisce probabilità dell'evento E, e si indica con $p(E)$, il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili:

$$p(E) = \frac{k}{n}$$

Probabilità dell'evento contrario
Se A è un evento e $\overline{A}$ è il suo evento contrario, allora si ha:

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

Probabilità dell'unione di due eventi
Se A e B sono due eventi, allora:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Eventi incompatibili ed eventi indipendenti

Due eventi A e B si dicono *incompatibili* se la loro intersezione è l'insieme vuoto.	Due eventi A e B si dicono *indipendenti* quando il sapere che uno dei due si è verificato **non** altera la probabilità dell'altro.
Se A e B sono due eventi incompatibili, allora: $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$	Se A e B sono due eventi indipendenti, allora: $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

Due eventi incompatibili, di probabilità diversa zero, **non** sono indipendenti.

Probabilità condizionata
Siano A e B due eventi, con B di probabilità non nulla; allora: $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$